Colle du 27/11 - Sujet 1
Intégrales et équations différentielles d'ordre 1

Question de cours. Enoncé et démonstration de l'intégration par parties.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)(2x - 3t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 2.

1. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{X(1+X)}$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.

Colle du 27/11 - Sujet 2
Intégrales et équations différentielles d'ordre 1

Question de cours. Méthode de variation de la constante.

Exercice 1. Résoudre $(E) : y' - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}y = \frac{t\,\mathrm{e}^{\sqrt{1-t^2}}}{t^2-2t-3}$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(E) : 2xy' + y = \frac{1}{1+x}$.

Colle du 27/11 - Sujet 3
Intégrales et équations différentielles d'ordre 1

Question de cours. Enoncé et démonstration de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à l'aide des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Exercice 1. Justifier l'existence et calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t + t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Résoudre $(E) : (1 + \mathrm{sh}(x))\,y' + -\mathrm{ch}(x)y = \left(1 - \mathrm{sh}^2(x)\right)\mathrm{ch}(x)$.

Colle du 27/11 - Sujet 4
Nombres complexes et calcul algébrique

Question de cours. Démonstration de $|z+z'|^2 = \dots$ et de l'inégalité triangulaire supérieure.

Exercice 1. Soient $(a,x,y) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le couple d'équations suivant :

$$\begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.